

О КНИГЕ М. А. ЦАЙГЕРА ПО ИСТОРИИ РУССКОЙ НАУКИ
(Цайгер М. А. Арифметика в Московском государстве XVI века. Беэр-Шева, 2010. — 72 с., ил.)

Книга к.т.н. Марка Аркадьевича Цайгера посвящена важному, сложному и недостаточно изученному вопросу истории русской математики — сошным дробям. Я помню, как на одном из заседаний научного семинара по истории математики и механики при МГУ имени М. В. Ломоносова известный ученый, крупный специалист именно в рассматриваемой области и один из руководителей семинара профессор А. П. Юшкевич (1906—1993) отметил, что система указанных дробей по типу деления пополам четей (четвертей) и третей заслуживает специального изучения. Поэтому нет сомнений, что работа М. А. Цайгера актуальна.

А. П. Юшкевич в своей фундаментальной книге по истории математики в России писал: «Эти два ряда дробей играли особенную роль при расчете податей и составляли важную часть сошного письма, как именовалась в XVI—XVII в. совокупность приемов поземельного налогового обложения»¹. Исследование М. А. Цайгера на соответствующую тему, несомненно, является знаменательным событием. Положительной чертой книги также выступает стремление автора органично вписать ее содержание в древнерусскую математическую культуру. С указанной целью М. А. Цайгер начинает свое повествование с ознакомления читателя с архаической «буквенной» нумерацией, которая употреблялась на Руси вплоть до XVIII в., когда была заменена в рамках Петровских преобразований системой современных чисел (индо-арабских)².

М. А. Цайгер также останавливается на оригинальном русском способе выражения именованных чисел «в решетках». Этот метод впервые в историографии осветил известный русский ученый и видный церковный деятель митрополит Евгений (Болховитинов) в первой отечественной работе по истории математики³. Прием записи чисел «в решенках» недостаточно изучен. Так, его нет в указанной выше книге А. П. Юшкевича. Он отсутствует в известной книге Б. В. Гнеденко⁴ и четырехтомном издании по истории отечественной математики⁵. Это повышает ценность для читателя книги М. А. Цайгера, где достаточно подробно рассказывается о счете «в решетках», что было необходимо для анализа источников о сошном письме.

Основными источниками в исследовании М. А. Цайгера выступают сохранившиеся от XVII—XVIII в. «Книги сошного письма», а также упомянутые выше «Цифирные счетные мудрости» и «Арифметики». Это рукописные тексты, и каждый экземпляр уникален. В некоторых из них содержался специальный раздел, посвященный так называемому «дощаному счету». Указанный счет является предшественником вычислительного прибора, известного как русские/конторские счеты. Принципы действия устройств типа «дощаного счета» были изучены известным историком-нумизматом И. Г. Спасским⁶.

Первоначально «дощаный счет» был довольно громоздким прибором, содержащим четыре вычислительных поля, представлявших собой деревянные рамы с закрепленными прутьями/шнуром с нанизанными счетными костяшками — для денежного счета, фискальных расчетов, вычисления мер емкостей и весов. В отличие от современных счетов, «дощаный счет» имел в

¹ Юшкевич А. П. История математики в России до 1917 года. М., 1968. С. 16.

² Как известно, последняя нумерация стала входить в русскую жизнь еще в XVI—XVII в., главным образом через рукописные варианты «Цифирной счетной мудрости».

³ Е[вгений]. О старинной славяно-русской арифметике // Вестник Европы. Ч. 71. № 17. С. 47—54.

⁴ Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России / Предисл. и коммент. С. С. Демидова. 2-е изд. М., 2005. (1-е изд.: М., 1946).

⁵ История отечественной математики: В 4 т. / Отв. ред. И. З. Штокало. Киев, 1966—1970.

⁶ Спасский И. Г. Происхождение и история русских счетов // Историко-математические исследования. М., 1952. Вып. 5. С. 269—420.



нижней части прутья/шнуров для счета четными и третями с их двоичными долями. Несмотря на внимание историков науки к «дощаному счету», он не до конца изучен.

В известной мере справедливо высказанное еще в 1946 г. мнение Б. В. Гнеденко: «По-видимому, все описания действий “досчатым счетом”⁷ утеряны; сохранилось только весьма неясное описание орудия счета»⁸. Поэтому попытка М. А. Цайгера проникнуть в вычислительные тайны «дощаного счета» заслуживает внимания историко-математической науки. Симптоматично, что сам автор скромно считает, что не все тайны ему удалось раскрыть: «...Некоторые специальные буквенные сокращения на схемах не удалось пока расшифровать... Многие вещи, о которых здесь шла речь, являются больше предположениями, чем доказанными фактами» (С. 68). Тем не менее метод анализа, который применяет М. А. Цайгер, вполне научен и заслуживает одобрения, использования другими исследователями и дальнейшего развития.

Дело в том, что М. А. Цайгер «замахнулся» на арифметическую «технологии» в русском государственном делопроизводстве и фиске XVI в., о которой по существу нет прямых источников. По указанной причине он использует метод реконструкции. За основу М. А. Цайгер берет встречающиеся в русских математических рукописях XVII в. так называемые «дщицы счетные» (в более ранних источниках они отсутствуют). «Дщицы счетные» анализировались историками математики и до М. А. Цайгера. Так, в четырехтомной истории отечественной математики «дщицы счетные» трактуются следующим образом: «В некоторых рукописях XVII в. встречаются рисунки с изображением “дщиц счетных”, являющихся вариантом дощаного счета XVII в.». Следовательно, в рассматриваемом издании «дщицы счетные» и «дощаный счет» — взаимосвязанные, но разные математические явления. Это подтверждается в указанном издании также сообщением об отличительном свойстве «дщиц счетных» и «дощаного счета»: «Дщицы счетные отличались от дощаного счета только тем, что состояли из счетного поля, разделенного 13 или 12 прямыми линиями, из которых шесть нижних переделаны пополам “перечнем”»⁹.

И. Г. Спасский считал «дщицы счетные» чертежом «дощаного счета»¹⁰. Это следует из подписи, которой он сопровождал изображение «дщиц счетных», заимствованное из русской математической рукописи XVII в.: «Чертеж “дощаного счета” (счетов) в рукописной “Арифметике” середины XVII в.»¹¹. И. Г. Спасский полагал, что в XVI—XVII в. «дощаный счет» сосуществовал с более архаичным русским счетом — «счетом костями», который не имел рамы, и счетные косточки в нем употреблялись не нанизанными, а в россыпи. Он считал, что окончательный переход в России на инструментальный счет типа «дощаного счета» произошел к середине XVII в.: «Но к середине XVII в. “дощаный счет” (счеты) взял верх и получил всеобщее распространение на всей территории Русского государства»¹².

М. А. Цайгер следующим образом характеризует «дщицу счетную»: «Думаю, что сейчас можно ответить на вопрос “что такое дщица счетная”. Это отрисованная на вспомогательной дощечке схема разметки стола для счета костями... В XVI веке такие вспомогательные дощечки были необходимы вычислителю, не давая ему сбиться при переносе результата вычислений на бумагу в славянской нумерации. По-видимому, и позже, в XVII веке, когда во многих местах расчетный стол, расчерченный мелом, был заменен на счеты (“дощаный счет”), а славянские буквы заменены на арабские цифры, потребность в дщицах счетных не сразу отпала» (С. 42). Таким образом, М. А. Цайгер, в отличие от И. Г. Спасского, считает «дщицы счетные» не чертежом «дощаного

⁷ Такой термин использует Б. В. Гнеденко для рассматриваемого вычислительного метода — «досчатый счет» (вместо «дощаный счет»).

⁸ Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России. С. 48.

⁹ История отечественной математики. Т. 1. С. 115.

¹⁰ Так («досчатый счет») И. Г. Спасский называл «дощаный счет».

¹¹ Спасский И. Г. Русская монетная система. 4-е изд. Л., 1970. С. 124.

¹² Там же. С. 123.



счета», а вспомогательным вычислительным средством, использовавшимся в «счете костями», который предшествовал счетному прибору (счетам), имевшему название «дощаный счет».

В этом мнении М. А. Цайгера перекликается с точкой зрения, выраженной в многотомной «Истории отечественной математики» (1966. Т. 1.), о том, что «дщицы счетные» и «дощаный счет» сходные, но разные вычислительные способы. Причем в издании 1966 г. не определяется, к какому конкретно вычислительному способу относятся «дщицы счетные». Кстати, о древнерусском оригинальном «счете костями» здесь нет речи, рассматривается лишь западноевропейский «счет на линиях», который ассоциируется со «счетом костями или пенязи» русских математических рукописей XVII–XVIII в. (Действительно, в этих рукописях под указанным названием речь идет о «счете на линиях», но И. Г. Спасский считал, что ему отвечает лишь заключительная часть названия («счет... пенязи»), а начальная часть («счет костями») принадлежит оригинальному русскому счету, отличному от «счета на линиях».)

В истории о «дощаном счете» не все ясно. Тем интереснее попытка М. А. Цайгера разобраться в ней. Иностранцы, жившие или посещавшие Россию в XVI–XVII в., отмечают использование русскими вычислителями плодовых косточек (сливовых и вишневых) в россыпи для счета, а не устройства, заключенного в деревянную раму с нанизанными счетными костяшками, то есть «дощаного счета». Это противоречит в известной степени мнению И. Г. Спасского о том, что «к середине XVII в. “дощаный счет” (счеты) взял верх и получил всеобщее распространение на всей территории Русского государства», ибо в таком случае «дощаный счет» должен был иметь определенное распространение в России в XVI – первой половине XVII в., и непонятно, как иностранцы его не заметили. Все становится на свои места, если допустить, что иностранцы наблюдали другой вид русского счета – «счет костями», потому что «дощаный счет» еще не был в массовом употреблении, а, может быть, имел такое ограниченное распространение, что вообще как бы не существовал.

Таким образом, идея М. А. Цайгера о том, что «дщицы счетные» отражают «счет костями», предшествующий «дощаному счету», может быть плодотворной в историко-математическом отношении, поскольку никаких других источников о «счете костями» по существу нет. Почти любое изображение «дщиц счетных», каковых в русских математических рукописях достаточно много, что-то дает для понимания облика и отдельных вычислительных черт «счета костями».

Во-первых, они свидетельствуют, что «счет костями» был построен по десятичному принципу. Об этом говорит то, что на рисунках «дщиц счетных» счетные элементы (кости) изображены в количестве десяти (редко девяти) на каждом полном вычислительном уровне. Во-вторых, в этом счете кости использовались в россыпи. Поэтому они нарисованы, как правило, лежащими на линиях счета, а не нанизанными на них. Правда, редко, но встречаются изображения нанизанных счетных костяшек, что может говорить о влиянии «дощаного счета». В-третьих, в «дщицах счетных» употребляется как архаическая «буквенная» нумерация, так и современная (индо-арабская). Это показывает, что «дщицы счетные» могут восходить к XVI в., когда в русской арифметике на смену «буквенной» нумерации приходила современная система записи чисел. В-четвертых, нижний отдел «дщиц счетных» подразделялся на две части для четвертных и третних дробей, построенных по принципу двоичности. Это говорило о том, что соответствующие двоичные дроби входили в «счет костями».

Недавно обнаружены данные (которых не мог знать М. А. Цайгер при написании рецензируемой книги) о том, что двоичные дроби на основе половин четей и третей, по-видимому, уже использовались на Руси в XVI в. Об этом свидетельствует расшифровка древнерусского текста (в списках XVI в.), в котором при дробном делении часа применялась соответствующая система дробей по типу половин: 5 с полчетвертью, 8 с полторою четвертию, 11 без полтор[ых] четвертей, пол 11 с полчетвертью, пол 14 без полчет[верти]¹³. Косвенно этот факт подкрепляет

¹³ Симонов Р. А. «[О часех] по-русски ж в Новгороде в Великом» // Древняя Русь. Вопросы медиевистики. 2009. № 3 (37). С. 106–108.



гипотезу М. А. Цайгера о том, что «дщицы счетные» восходят к XVI в. или даже к рубежу XV—XVI в., если учесть дату 1495 г., указываемую в конвое некоторых текстов, сопровождавших русские расчеты о дробных часах¹⁴.

Важным и содержательным материалом в книге М. А. Цайгера является расшифровка конкретных древнерусских способов счета в системе «сошных дробей». Об этой проблеме И. Г. Спасский писал следующее: «В распоряжении древнерусской “бухгалтерии” были специальные переводные таблицы, позволявшие приводить дроби обоого рода (четвертные и третные. — Р. С.) к “общему знаменателю”; замечательно, что им служил д е н е ж н ы й с ч е т: оказывается, любую дробь обоих видов можно выразить в виде определенной денежной суммы, после чего трети и четверти складываются или вычитаются проще простого»¹⁵.

Те вспомогательные средства, которые И. Г. Спасский называет «специальными переводными таблицами», могут сводиться к своеобразным формулам. М. А. Цайгер воспроизводит одну из таких формул, которая в древнерусских сошных дробях звучит так: «Четь да полчети да полполтрети да пол-пол-полтрети, итого треть и полтрети сохи». В современном обозначении дробей она может быть выражена следующим равенством: $1/4 + 1/8 + 1/12 + 1/24 = 1/3 + 1/6$. Смысл равенства состоял в переводе одних сошных дробей в другие, что было нужно для рационализации вычислений при взимании налога с угодий, состоящих из участков владений различной величины и ценности (пашни, леса, луга). При этом решался и вопрос правильности расчетов, для чего существовал механизм быстрой их проверки.

При такой проверке, например, использовался так называемый «московский счет», который М. А. Цайгер описывает в своей книге. В основе этого метода лежало приравнивание счетной единице 8 алтынов, равных 48 денгам. Его смысл автор передает так: «Поскольку в 8 алтынах содержится 48 денег, значения третных и четвертных дробей как бы увеличивались в 48 раз, в результате чего дробные слагаемые как бы превращались в целые числа, оперировать с которыми служилые люди умели. После получения окончательного результата его обратно превращали в дробь по тому же принципу (то есть из расчета, что 8 алтын равно единице)» (С. 48). Для проверки воспроизведенного равенства (утверждения) нужно вместо единиц числителей подставить 8 (алтын) или 48 (денег), перевести в одинаковые денежные единицы и убедиться в выполнении равенства (утверждения). В таком случае, следуя за подсчетами М. А. Цайгера, получим: «В левой части утверждения: четь = 2 алт[ына]; полчети = 1 алт[ын]; пол-полтрети = 4 ден[ги]; пол-пол-полтрети = 2 ден[ги]. $2 \text{ алт[ына]} + 1 \text{ алт[ын]} + 4 \text{ ден[ги]} + 2 \text{ ден[ги]} = 3 \text{ алт[ына]} + 6 \text{ ден[ег]} = 4 \text{ алт[ына]}$. В правой части утверждения: треть = 2 алт[ына] 4 ден[ги]; полтрети = 1 алт[ын] 2 ден[ги]. $2 \text{ алт[ына]} 4 \text{ ден[ги]} + 1 \text{ алт[ын]} 2 \text{ ден[ги]} = 3 \text{ алт[ына]} + 6 \text{ ден[ег]} = 4 \text{ алт[ына]}$. Левая часть равна правой, то есть утверждение является верным» (С. 52). Действительно, очень простой способ проверки, причем он не был заимствован, а разработан на русской денежной основе.

Кажется, именование метода «московским» дает возможность точнее его идентифицировать. Деля 48 на 8, получаем 6; это значит, что 1 алтын равнялся 6 денгам. Общеизвестно, что алтын имел указанное значение чуть ли не с XIV в.: «Алтын, рус[ская] счетно-ден[ежная] единица 14 в., равная 6 денгам, позже 3 копейкам»¹⁶. История денежного обращения на Руси показывает, что эти сведения не совсем точны. На основе актового (в широком значении слова) материала В. А. Кучкин пришел к выводу, что документы XIV — первой трети XVI в. свидетельствуют о существовании двух зон — московской и новгородской, где имели хождение разные фракции рубля. В московской зоне обращались алтын и денга, в новгородской — бела и четверетца. Алтын и денга появились под влиянием золотоордынского, возможно, шире — восточного, денежного обращения.

¹⁴ Там же. С. 108.

¹⁵ Спасский И. Г. Русская монетная система. С. 123.

¹⁶ Фенглер Х., Гироу Г., Унгер В. Словарь нумизмата. 2-е изд. / Пер. с нем.; отв. ред. В. М. Потин. М., 1993. С. 12.



Новгородское денежное обращение, по-видимому, испытывало воздействие стран Западной Европы, о чем может свидетельствовать равенство четверетцы любекскому пфеннигу. Причем новгородская бела равнялась двум московским денгам. Известное после денежной реформы 1535–1538 г. Елены Глинской соотношение между «новгородками» и «московками» (одна «новгородка» равнялась двум «московкам») существовало по меньшей мере с первой четверти XV в.¹⁷

Из этого следует, что есть определенные основания относить появление «московского счета» ко времени после реформы Елены Глинской. Скорее всего, он был принят в XVI в. в связи с осуществлением фискальной реформы «Большой сохи». Нельзя, однако, исключать корни «московского счета» в составе «счета костьми» (в варианте, который М. А. Цайгер реконструирует для XVI в.) даже в XV в. Это имеет важное значение для базового источниковедческого положения М. А. Цайгера о правомерности реконструкции арифметических знаний в Московском государстве XVI в. на основе источников («дщиц счетных»), сохранившихся в списках более позднего времени — XVII–XVIII в.

С рядом других арифметических приемов, которые М. А. Цайгер реконструирует для России XVI в., можно познакомиться непосредственно по его книге, я же хочу коснуться вопроса, связанного с приближенными вычислениями. Автор рецензируемой книги, углубившись в вычислительный материал, заметил в нем примечательную особенность, состоящую в том, что древнерусские математики величины, превышающие $1/48$, «попросту отбрасывали, полагая, что их учет не повлияет по существу на результат» (С. 57). При этом М. А. Цайгер фиксирует отмеченный факт в качестве недостатка («счет имел один недостаток»). Уважаемый автор поступает как эксперт, оценивающий явление по математическому существу, а не в историческом контексте его появления и функционирования.

Если же учесть, что речь идет об особой арифметике — сошных дробях, то следует обратить внимание на историко-экономическую сторону такой арифметики. «Сошное письмо» предназначалось для выполнения начатого практически с нуля, разработанного и осуществленного правительством Ивана Грозного в середине XVI в. государственного фискального проекта «Большой сохи» по налоговому обложению огромных земельных угодий России. Задача собрать все до копейки потребовала бы затраты немалых средств и времени для обучения (в том числе и математике) огромной армии сборщиков налогов, на подготовку и содержание отрядов для их охраны и выбивания долгов. При такой перспективе деятельность фискальных служб грозила увязнуть в проблемах и растянуться на долгие годы, так и не достигнув желаемого результата.

В таких условиях перед соответствующими службами наиболее оптимальным было бы поставить задачу реализации проекта «Большой сохи» по типу минимакса: с наименьшими издержками достигнуть максимума возможного результата в налогообложении. Априори, например, можно было эту задачу решать путем разработки простого способа для приближенного подсчета налоговых сборов, в котором за счет ослабления точности результата достигался выигрыш во времени и затрате умственных усилий. При этом должна была существовать возможность быстрой и доступной проверки расчетов, чтобы сократить число апелляций к властям налогоплательщиков и их жалоб на недобросовестность счетчиков/писцов. Возможно, реконструированные М. А. Цайгером особенности русской сошной арифметики XVI в. ценны в первую очередь тем, что положительно отвечают именно на этот важный вопрос.

¹⁷ Кучкин В. А. Рубль, полтина и другие фракции рубля по свидетельствам русских документов XIV — первой трети XVI вв. (в печати). Автор рецензии благодарит В. А. Кучкина за возможность ознакомиться с его работой в рукописи.